



Para una buena didáctica (de la matemática) es necesario un buen saber (matemático)*

Martha Isabel Fandiño
Universidad de Bolonia (Italia)
Universidad Distrital Francisco José de
Caldas. Bogotá (Colombia)

En un período de gran éxito de la didáctica de la matemática como teoría propia, cada vez más popular entre los maestros, se lanza un grito de alarma en la urgente necesidad de una verdadera formación técnica y disciplinaria de los profesores de matemática.

Palabras clave: *saber, competencia errores en matemática.*

To teach (mathematics) well you need knowledge (of mathematics)

At a time of great success for mathematics teaching as a theory that is increasingly popular among teachers, this paper sounds a warning about the pressing need for proper technical and disciplinary training of mathematics teachers.

Keywords: *knowledge, competence, mistakes in mathematics.*

GRAO

■ **Las bases de la investigación en didáctica de la matemática**

Este trabajo propone unas reflexiones sobre la preparación disciplinaria de los profesores de matemática, a la luz de los resultados de la investigación didáctica.

En las últimas décadas, se ha prestado mucha atención a los problemas que afrontan los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, lo que condujo, a través de la investigación empírica, de una forma de interpretar la antigua didáctica de la matemática centrada en la enseñanza (o didáctica A, *Ars docendi*) a una interpretación como «epistemología del aprendizaje» (o didáctica B) (D'Amore, 1999)¹ específica para la matemática.

En este contexto de didáctica B, se analizó el problema del contrato didáctico, tal vez el que, entre otros argumentos, tuvo mejor suerte, no solo en términos de investigación, sino también por la explicación obvia de muchos fenómenos previamente inexplicables. La investigación en este área no está terminada, de hecho, es absolutamente actual (D'Amore y otros, 2010).

Por cierto, recientemente ha sido objeto de estudios sociológicos realizados por investigadores en didáctica de la matemática que han mostrado un camino diferente de la interpretación clásica del mismo fenómeno (Bagni y D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore, Radford y Bagni, 2006).

Este éxito llevó a estudiar las situaciones didácticas como aquellas situaciones que pueden



garantizar un aprendizaje real, profundo y estable, situaciones en las cuales se margina el malestar generado por el contrato didáctico, en oposición a las situaciones didácticas que se alimentan precisamente de este.

La evidencia inmediata es que el éxito del aprendizaje parece lograrse con rapidez gracias a las situaciones didácticas, también a causa de los estereotipos que la costumbre didáctica ha destacado. Pero la investigación ha demostrado cuáles son los terribles «efectos» de las situaciones didácticas sobre el aprendizaje (o mejor, sobre el no-aprendizaje) de los estudiantes, y sobre las consecuencias de amargas decepciones de los profesores (Brousseau, 2008).

Más en general, relacionados con el fenómeno del contrato didáctico, estudios actuales que tienen como base las clásicas investigaciones de escuela francesa de los años setenta y ochenta mostraron cómo ciertas situaciones de aula pueden ser interpretadas como «deslizamientos didácticos», es decir intentos de «embridar» en una falsa relación el saber en juego, las expectativas del profesor y las expectativas (falsas) del estudiante. Por ejemplo, la tentativa de ilusionar al estudiante con la existencia de métodos algorítmicos para resolver problemas; o la de obligar a los estudiantes a «resolver» problemas usando analogías con situaciones similares proporcionadas por fuerza por el docente, creando en todos (profesor, estudiante, familia y sociedad) la ilu-

Hemos analizado y aprendido a interpretar, como investigadores y como profesores activos y críticos, algunos de los fenómenos del aula a través de la conveniente y flexible metáfora esquemática del triángulo de la didáctica



Cuadro 1. Triángulo de la didáctica

sión de que se ha producido un aprendizaje, cuando en realidad, de hecho, aprendizaje no hay (Brousseau y D'Amore, 2008).

Aprendimos a conocer los diferentes obstáculos que se interponen entre el saber de aprender y el saber disponible en cada uno de los estudiantes (no solo en la zona efectiva, sino también especialmente en la zona de desarrollo próximo, con referencia obvia a Vygotsky) (D'Amore y otros, 2008).

Hemos analizado y aprendido a interpretar, como investigadores y como profesores activos y críticos, algunos de los fenómenos del aula a través de la conveniente y flexible metáfora esquemática del triángulo de la didáctica (cuadro 1) (D'Amore, 2001; D'Amore y Fandiño Pinilla, 2002).

También hemos podido, gracias a los tres psicólogos Efraím Fischbein, Gérard Vergnaud y Raymond Duval, verdaderos pioneros que dedicaron su vida al estudio de la didáctica de la matemática, incorporar en nuestra disciplina sus investigaciones, mezclándolas con reflexiones de carácter matemático (D'Amore, 1999).

En particular, entendimos cómo algunos estudiantes se enfrentan a grandes temas de matemática con imágenes o modelos (a menudo incorrectos) que se construyeron en los grados precedentes, modelos (fuertes) que deberían ser



A través de la investigación didáctica hemos entendido cómo algunos estudiantes se enfrentan a grandes temas de matemática con imágenes o modelos a menudo incorrectos que se construyeron en los grados precedentes

sólo imágenes (débiles, inestables); estos modelos incorrectos no son congruentes con las expectativas del maestro, cuando el maestro está disciplinariamente preparado; y esta discrepancia crea situaciones de aula que, tarde o temprano, saldrán de las manos del profesor, manos profesionales sí, pero no demiúrgicas.

Sucede en otras ocasiones que el modelo incorrecto ha sido propuesto por el mismo profesor, por lo cual el profesor lo acepta, lo reconoce como congruente con el suyo, pero obviamente estamos fuera del saber.

Por ejemplo, a veces se sugiere al estudiante que las rectas del plano pueden ser verticales, horizontales u oblicuas; este curioso modelo de localización de las rectas es sugerido muchas veces por el mismo docente y, por lo tanto, se vuelve natural para el estudiante, existe una plena coherencia entre lo aprendido (por parte del alumno) y lo esperado (por parte del maestro). Pero es un modelo equivocado; está bien para dibujar en una hoja de papel, provisto de bordes a los cuales hacer referencia, o para indicar una dirección privilegiada con respecto a la página de un libro, orientada en el sentido de la lectura; pero está totalmente fuera de lugar en relación con el plano geométrico, ya que siendo este ilimitado no existen «bordes» a los cuales hacer referencia.

Otro ejemplo: a veces se dice que 1 es el elemento neutro de la multiplicación, justificando esta afirmación por el hecho de que si a es cual-

quier número natural, $a \times 1 = a$. Esta falsa justificación volvería el número natural cero el elemento neutro de la sustracción, dado que, si a es cualquier número natural, $a - 0 = a$. Pero esta justificación es falsa, la sustracción no tiene elemento neutro alguno; es cierto que $a - 0 = a$, pero $0 - a \neq a$ en general (vale la igualdad sólo cuando a es el precisamente 0). Para la multiplicación, sí, 1 es el elemento neutro, dado que, para todo a , $a \times 1 = 1 \times a = a$, pero no por la razón (insuficiente) expresada en precedencia.

Todos hemos aprendido a estudiar con una profundidad cada vez mayor la problemática de la representación semiótica y la estrecha necesidad de una conexión de esta con la noética. Estudiando la epistemología de la matemática y su didáctica, comprendimos por completo la profundidad de la profunda sentencia duvaliana: no existe noética sin semiótica.

En innumerables ocasiones hemos tenido conversaciones con los maestros de todo el mundo sobre sus propias creencias y sobre cómo estas determinan las actividades que proponen en aula (Didáctica C: epistemología del profesor, D'Amore, 2006; Campolucci y otros, 2006).

También hemos hecho estudios que muestran cómo las convicciones de los docentes cambian frente a un aumento de las específicas competencias en el ámbito de la matemática, su didáctica y su epistemología (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2004).

Este hecho condiciona, entre otras cosas, tanto la capacidad de motivar como la exaltación de la volición (el «querer hacer» por parte de los estudiantes). Debemos tener siempre presente que la motivación y la volición son las dos caras de la misma moneda, esta moneda es sin lugar a dudas «el hacer en el aula». Corresponde al profesor motivar; pero si el estudiante no enciende y no pone en movimiento su propia volición personal, no hay nada que hacer, el hacer en el aula no despegar (Pellerey, 1993; D'Amore, 1999).



■ El estudiante aprende de nosotros

Sin embargo, la relación cada vez más estrecha y confidencial con los maestros (durante actividades de investigación o de formación) mostró que, en ocasiones, se tienen en cuenta los aspectos didácticos para enseñar un concepto de naturaleza matemática, relativo por lo tanto a un saber; pero que no es plenamente conocido por quien intenta enseñarlo; o quien enseña hace uso de un lenguaje que algunas veces no domina; o pretende la resolución de un problema con respecto al cual el mismo docente no está seguro de poder orientar hacia una estrategia de resolución (a parte las inútiles indicaciones o frases normativas que no sirven para nada: «lee con atención», «piensa en la pregunta», «identifica los datos», «haz un modelo de la situación»...). Por otra parte, las malas concepciones presentes en algunos maestros han sido objeto de intenso estudio de varios investigadores (Sbaragli, 2004, 2005, D'Amore, Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005; D'Amore, 2007; Sbaragli y otros, 2011).

En estos casos, la obvia consecuencia es que se usa un lenguaje no correcto, un concepto erróneo, una estrategia ineficaz, un algoritmo inapropiado. El estudiante aprende de nosotros, aprende perfectamente, pero aprende algo que no es correcto, teniendo en cuenta el saber desde el punto de vista del conocimiento disciplinar (Fandiño Pinilla, 2006a).

Reflexionemos sobre el conocimiento del profesor; este es fundamental y necesario, no lo

La motivación y la volición son las dos caras de la misma moneda, esta moneda es sin lugar a dudas «el hacer en el aula»

En particular, la función de la actividad matemática en la escuela primaria debe ser considerada como la base de conocimientos para futuros aprendizajes, nunca como aprendizajes concluidos

podemos olvidar, no pensemos que este saber siempre es dominado plenamente. En la mayoría de los casos, la transposición didáctica debería conducirnos a asegurar que el resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje fuese la formación en el estudiante de una imagen inestable y débil, no un modelo definitivo estable y fuerte. En particular, la función de la actividad matemática en la escuela primaria debe ser considerada como la base de conocimientos para futuros aprendizajes, nunca como aprendizajes concluidos.

Por ejemplo, el conocimiento sobre las áreas de las figuras planas un día conducirá al estudio de las integrales; no se completa con cuatro fórmulas triviales que por lo general están mal memorizadas y que a menudo llevan a la confusión de la idea de superficie (un hecho geométrico) con la de área (una medida) (Fandiño Pinilla y D'Amore, 2006).

La infinitud de los números naturales no debe confundirse con el hecho de que este conjunto es ilimitado: esta confusión lleva a que algunos estudiantes piensen que en un segmento limitado existe una cantidad finita de puntos y que esta cantidad depende de la longitud del segmento y que solo la recta contiene infinitos puntos (Arrigo y D'Amore, 1999, 2002).

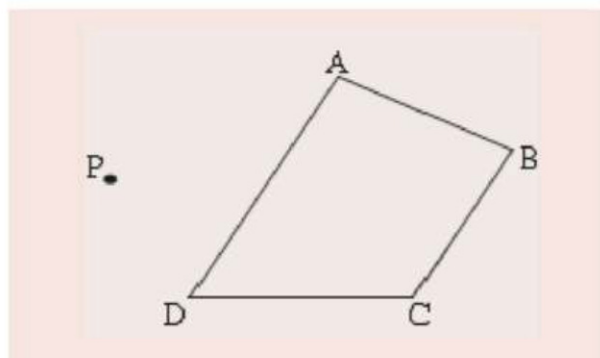
Una aceptable y razonable argumentación, dependiendo de la edad del estudiante y por tanto de su nivel escolar, debe llevar un día a una buena, correcta, coherente demostración.

La idea de infinitud de los números naturales, junto con oportunas relaciones de orden, deberá conducir en los grados superiores a la construcción de la densidad de los números racionales, y después a la continuidad de los números reales; pero sabemos con certeza, a partir de los resultados de investigación, que la mayoría de los estudiantes no construye la idea de densidad en Q ; y que una mínima parte alcanza a construir la idea de continuidad en R . Además se verificó que son muchos los estudiantes que confunden densidad con continuidad sin ver diferencia alguna entre estas dos ideas (Arrigo y D'Amore, 1999, 2002).

A partir del número natural, se debe llegar a la construcción de los números complejos; números tan... complejos, que si no se gestionan bien, su intento de construcción terminará en un abismo, lleno de obstáculos epistemológicos y didácticos (Bagni, 1997).

El conteo de los números naturales, de uno en uno, de dos en dos, o a partir de ciertas reglas, dará lugar al estudio de las sucesiones; el estudio de sucesiones como $1/2$, $1/3$, $1/4$... debe culminar con el estudio de los límites.

Hay que estar muy atentos con el lenguaje que se usa en aula; es cierto que, en la escuela primaria, no es necesario utilizar un lenguaje muy especializado o demasiado refinado, esto porque la edad de los estudiantes no lo permite y también porque, honestamente, no parece indispensable: el lenguaje natural en sí mismo ya posee todas las potencialidades necesarias para expresar las ideas matemáticas que se trabajan en esta edad. Pero hay que estar muy atentos; por ejemplo, muchos confunden infinito con ilimitado; otros piensan que, porque un ángulo es «interno» a un polígono, entonces deja de ser ilimitado y se convierte en una figura limitada. En otras palabras, la investigación mostró que casi ningún estudiante y muy pocos profesores están



Cuadro 2. El punto P pertenece al ángulo ABC, ángulo «interno» al polígono ABCD

dispuestos a admitir que el punto P pertenece al ángulo ABC, ángulo «interno» al polígono ABCD (cuadro 2).

Las fracciones no son fines en sí mismas, deben conducir un día a la construcción de los números racionales (Fandiño Pinilla, 2005).

Tenemos que animar a los profesores de primaria a prestar mucha atención antes de utilizar expresiones tan difundidas como «sólidos que ruedan» (algo que escuchamos) en lugar de «sólidos de revolución»; o de referirse a la «forma de los puntos»: el punto es un objeto geométrico de dimensión cero, por lo tanto no puede tener forma alguna. Y así sucesivamente.

■ La necesidad de una correcta construcción del saber

Sin embargo, si el maestro no sabe, si no conoce estos temas del saber, dado que su conocimiento matemático no fue estructurado en este sentido; si su conocimiento para enseñar coincide con su «saber», no podrá nunca realizar una transposición didáctica; por lo que el resultado final será enseñar lo que sabe, como lo sabe, al límite de sus competencias y, desafortunadamente, arrastrando en su enseñanza unos eventuales errores que no es capaz de controlar o de eliminar.



Otra consideración: en su larga vida escolar, el estudiante aprende en la escuela primaria la adición entre números naturales (a menudo erróneamente y trivialmente confundida con la actividad práctica corpórea empírica del simple reunir, un modelo intuitivo que no es suficiente para asegurar el aprendizaje de esta operación). Después encuentra la adición entre números con coma, entre fracciones, entre números racionales, números enteros y reales; y estamos ya en situaciones complicadas (hemos encontrado estudiantes que afirman que apoyándose en argumentos «naturales»); y estudia después la adición en álgebra que generalmente, de hecho casi siempre, es una operación solo indicada, no realizada (es decir, la adición entre a y b no es c , como dicen algunos estudiantes, sino que es $a + b$ y no más). Luego viene la adición entre vectores, la adición entre monomios para dar lugar a polinomios, aquella entre polinomios, entre matrices, entre números complejos, entre funciones, aquella de álgebra de Boole y así sucesivamente. Sin embargo, si después de trece años de escolaridad completa (en algunos países son once) se pregunta a un estudiante qué es la adición, emerge solo la concepción adquirida en la escuela primaria, la única que ha dejado una marca (evidentemente modelo, demasiado temprano, y no solamente la imagen como debería ser en primaria).

La pregunta, en relación con el tema que estamos tratando, es la siguiente: ¿cuántos maestros, de escuela primaria, son conscientes de la potencial evolución, de la necesaria evolución, del concepto de *adición*? Es decir, ¿cuántos están convencidos que, en el saber, la adición se limita solo a la idea enunciada y propuesta, y en el primer año de la primaria? Muchos, de hecho, creen firmemente que la adición, en el saber matemático, es real y únicamente la que ellos enseñan en primero de primaria y no sospechan siquiera que

en los futuros años de escolaridad seguirán muchas más «adiciones».

Lo mismo podemos decir de otras operaciones y de muchos otros temas. Muchos estudiantes, incluyendo los de cursos avanzados, y algunos profesores, identifican las operaciones binarias definidas en los diferentes sistemas numéricos con las cuatro operaciones básicas racionales elementales aprendidas en la escuela primaria. Sin recurrir a conjuntos numéricos más complejos o sofisticados, solo quedándonos en \mathbb{N} , si se intenta dejar claro que las operaciones binarias definidas en \mathbb{N} no son cuatro, pero infinitas –de hecho, en cierto sentido, más que infinitas (numerables), aunque son muy pocos los que realmente entienden esta afirmación–, se ven caras asombradas e intrépidas.

Debemos ser plenamente conscientes de la necesidad absoluta de una preparación disciplinaria base. Desde este punto de vista, cobra particular importancia una pregunta diabólica que todos nos hacemos; ante un tema de matemática que es habitual en la escuela (tradicional o no), es bueno, de vez en cuando, preguntarnos: ¿por qué enseñar este tema? o, en la versión preferida por los niños y adolescentes: ¿para qué sirve?

¿Por qué enseñar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición? ¿Para qué sirve? ¿Por qué enseñar el máximo común divisor? ¿Para qué sirve? ¿Realmente el mínimo común múltiplo se requiere para realizar la suma de fracciones? (en realidad esta idea es falsa). ¿Por qué enseñar logaritmos? ¿Para qué sirve?

Las respuestas pueden ser intrínsecas a la propia matemática: por ejemplo: para llegar a ciertas «competencias en matemática», estos temas son conocimientos necesarios; o pueden encontrar respuestas externas a la matemática: para construir lo que en otros textos consideré «competencias matemáticas» (Fandiño Pinilla, 2006b; D'Amore, Díaz Godino y Fandiño Pinilla, 2008).



Cobra particular importancia una pregunta diabólica que todos nos hacemos; ante un tema de matemática que es habitual en la escuela (tradicional o no), es bueno, de vez en cuando, preguntarnos: ¿por qué enseñar este tema? o, en la versión preferida por los niños y adolescentes: ¿para qué sirve?

Si estos problemas se reflejan positivamente en los dos sectores, es decir, sirven para crear competencias matemáticas y competencias en matemática, está muy bien; si se encuentran por lo menos en solo uno de los dos, también se acepta; pero si no se encuentra una razón en ninguno de los dos, probablemente aquel tema «no sirva para nada» (parafraseando el libro de éxito que ha ganado premios de Bolondi y D'Amore, 2010). En este último caso, se puede considerar la posibilidad de prescindir de este tema, dejando lugar para algo que merezca más atención.

Si continuamos tratando un argumento inútil en el currículo, la falta de justificación podría ser un signo de un saber que no está bien construido; o podría ser indicativo del hecho de no ser capaz de tomar decisiones conscientes y maduras; o podría significar que somos esclavos del currículo y que no pensamos que este sea una herramienta en nuestras manos y no a la inversa (Fandiño Pinilla, 2002).

Todo esto depende de una efectiva, profunda, significativa y consciente construcción del saber.

Notas

- * Este trabajo es llevado a cabo en el ámbito del PRIN (Programas Científicos de Investigación de Especial Interés Nacional de Italia) titulado: *La enseñanza de la matemática: conceptos, mejores prácticas y capacitación de los maestros*,

años 2008-2013, n. prot. 2008PBBWNT; Unidad Local de Bologna (NRD, Departamento de Matemática): *Capacitar a los profesores de matemática*. Versión italiana del trabajo: M.I. Fandiño Pinilla (2011), «Per una buona didattica è necessario un buon Sapere», *Bollettino dei docenti di matematica*, Bellinzona (Suiza), núm. 62, pp. 51-58.

1. Reenvío a este mismo texto (D'Amore, 1999) para las definiciones de las palabras técnicas que se refieren a la didáctica de la matemática que se usan en el presente artículo sin ninguna explicación. Me parece sorprendente el hecho que el significado de algunas de estas es aún hoy desconocido para algunos maestros de matemática. Afortunadamente, son cada vez menos.

Referencias bibliográficas

- ARRIGO, G.; D'AMORE, B. (1999). «Lo vedo, ma non ci credo. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale». *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 22B(5), pp. 465-494. [Versión en español: «Lo veo pero no lo creo. Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual», *Educación Matemática*, vol. 11(1), pp. 5-24]
- (2002): «Lo vedo ma non ci credo..., seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor». *La matematica e la sua didattica*, núm. 1, pp. 4-57. [Versión en español: «Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor», *Educación Matemática*, vol. 16(2), 2004, pp. 5-20]
- BAGNI, G.T. (1997): «Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secon-



- daria superiore». *La matematica e la sua didattica*, núm. 3, pp. 306-319.
- BAGNI, G.T.; D'AMORE, B. (2005): «Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale». *La matematica e la sua didattica*, núm. 1, pp. 73-89.
- BOLONDI, G.; D'AMORE, B. (2010): *La matematica non serve a nulla*. Bologna. Compositori. [Versión en español: *La matemática no sirve para nada*, Bogotá, Editorial B, 2011]
- BROUSSEAU, G. (2008): *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bolonia. Pitagora.
- BROUSSEAU, G.; D'AMORE, B. (2008): «I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico», en D'AMORE B.; SBARAGLI F. (eds.): *Didattica della matematica e azione d'aula. Actas del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica* (Castel San Pietro Terme, noviembre 2008). Bolonia. Pitagora, pp. 3-14.
- CAMPOLUCCI, L., y otros (2006): «Cambios de convicción en la práctica didáctica concerniente a las fracciones». *La matematica e la sua didattica*, núm. 3, pp. 353-400.
- D'AMORE (1999): *Elementi di didattica della matematica*. Bolonia. Pitagora. [Versión en español: *Didáctica de la Matemática*, Bogotá, Magisterio, 2006]
- (2001): «El "triángulo" alumno-enseñante-saber en la didáctica de la matemática». *L'educazione matematica*, vol. 3(2), pp. 104-113.
- (2005): «Prácticas y metaprácticas en la actividad matemática de la clase entendida como sociedad. Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica». *La matematica e la sua didattica*, núm. 3, pp. 325-336.
- (2006): «Didáctica de la matemática "C"», en SBARAGLI, S. (ed.): *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Actas del Congreso Internacional homónimo (Castel San Pietro Terme, 23 septiembre). Roma. Carocci, pp. 93-96.
- (2007): «El cero, un obstáculo epistemológico a un obstáculo didáctico». *La matematica e la sua didattica*, vol. 21(4), pp. 425-454. [Versión en español: «El cero, un obstáculo epistemológico a un obstáculo didáctico», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de Matemáticas*, núm. 78, pp. 10-37]
- D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M.I. (2002): «Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"». *Educación Matemática*, vol. 14(1), pp. 48-61.
- (2004): «Cambios de convicción en los docentes de matemática de la escuela secundaria superior en formación inicial». *La matematica e la sua didattica*, núm. 3, pp. 27-50. [Versión en español: «Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior», *Epsilon*, núm. 58, vol. 20(1), pp. 25-43]
- (2005): «Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes». *La matematica e la sua didattica*, núm. 2, pp. 165-190. [Versión en español: «Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes», *Relime (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa)*, vol. 10(1), pp. 39-68]
- D'AMORE, B., y otros (2008): *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento. Erickson. [Versión en español: *La didáctica y la dificultad en matemática: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*, Bogotá, Magisterio, p. 208]
- (2010): *La didattica della matematica: gli "effetti" del contratto*. Bolonia. Archetipolibri. [Prefacio y postfacio de Guy Brousseau]



- D'AMORE, B.; DÍAZ GODINO, J.; FANDIÑO PINILLA, M.I. (2008): *Competencias y matemática*. Bogotá. Magisterio.
- D'AMORE, B.; RADFORD, L.; BAGNI, GT. (2006): «Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali». *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 29B(1), pp. 11-40. [Versión en español: *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia]
- D'AMORE, B.; SBARAGLI, S. (2005): «Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione"». *La matematica e la sua didattica*, núm. 2, pp. 139-163.
- FANDIÑO PINILLA, M.I. (2002): *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna. Pitagora. [Versión en español: *Curriculo, evaluación y formación docente en matemática*, Bogotá. Magisterio]
- (2005): *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora. [Versión en español: *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*, Bogotá, Magisterio]
- (2006a): «Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro», en SBARAGLI, S. (ed.): *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo* (Castel San Pietro Terme, 23 settembre). Roma. Carocci, pp. 117-120.
- (2006b): «Educare alla competenza matematica». *Rassegna*, núm. especial: *Matemática: l'emergenza della didattica nella formazione*, pp. 21-28.
- FANDIÑO PINILLA M.I.; D'AMORE, B (2006): *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento. Erickson. [Versión en español: M.I. FANDIÑO PINILLA y D'AMORE, B. (2009), *Área y perímetro*. Bogotá, Magisterio]
- PELLEREY, M. (1993): «Volli, sempre volli, fortissimamente volli». *Orientamenti pedagogici*, núm. 6, pp. 1005-1017.
- SBARAGLI, S. (2004): *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico*. Tesis doctoral. Universidad de Bratislava. [Versión en italiano y en inglés en: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm]
- SBARAGLI, S. (2005): «Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili"». *La matematica e la sua didattica*. núm. 1, pp. 57-71.
- SBARAGLI, S., y otros (2011): «Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students». *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 10(1), pp. 61-102.

Referencias de la autora

Martha Isabel Fandiño Pinilla

Universidad de Bologna

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá (Colombia)

bruno.damore@unibo.it

Línea de trabajo: didáctica de la matemática.

Este artículo fue recibido por UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en julio de 2013 y aceptado en septiembre de 2013 para su publicación.